2.7.23 Soustavy rovnic obsahující kvadratickou rovnici II

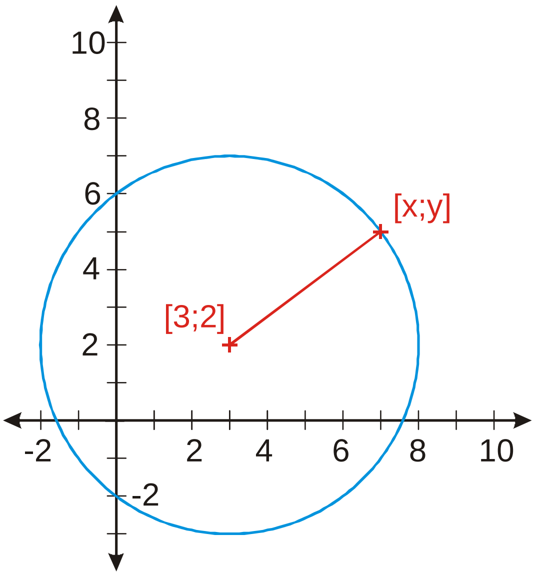
Předpoklady: 020723

Soustavy s kvadratickou rovnicí se často vyskytují v analytické geometrii (náplň druhého pololetí třetího ročníku).

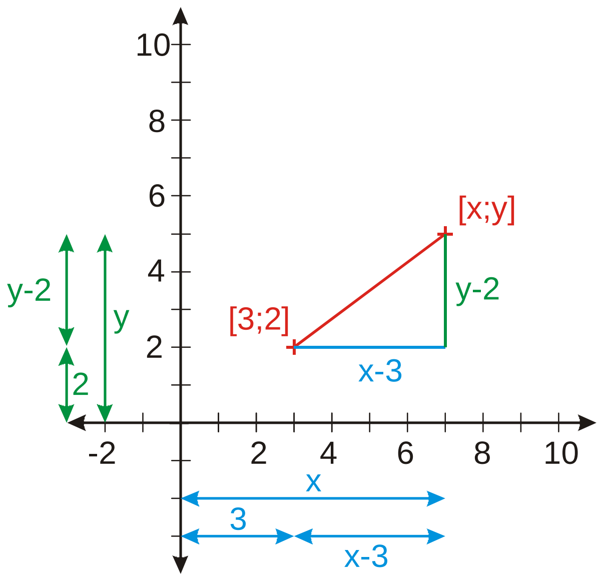
Typický příklad z analytické geometrie vypadá takto: Urči všechny body na přímce $y = 4 - x$, které mají od bodu $[3;2]$ vzdálenost 5.

Každému geometrickému objektu odpovídá v analytické geometrii rovnice. Například body na přímce uvedené v zadání poznáme podle toho, že jejich souřadnice splňují rovnici $y = 4 - x$.
Pokud bod leží v průsečíku dvou objektů, musí splňovat obě rovnice $\Rightarrow$ hledání průsečíků, pak přechází v řešení soustav rovnic.

Jak napíšeme: „vzdálenost od bodu $[3;2]$ je 5“?



Hledaná vzdálenost bodu $X[x;y]$ od bodu je vyznačena červeně. Můžeme ji určit pomocí pravoúhlého trojúhelníku.



Z obrázku můžeme určit délky stran trojúhelníka a dosadit do Pythagorovy věty:

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ (dosadíme $c=5$, $a=x-3$, $b=y-2$)

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=5$ - tuto rovnici splňují všechny body modré kružnice na prvním obrázku (střed v bodě $[3;2]$, poloměr 5), proto se používá jako rovnice kružnice (v umocněném tvaru na další řádce)

$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=5$ $/^2$ - můžeme, vše je kladné

$(x-3)^2+(y-2)^2=25$

$y=4-x$

Zbytek postupu je obsahem následujícího příkladu.

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2&=25\\ y&=4-x\end{aligned}$

soustava rovnic, řešíme dosazením $y=4-x$

$(x-3)^2+(4-x-2)^2=25$

$(x-3)^2+(2-x)^2=25$

$x^2-6x+9+(4-4x+x^2)=25$

$2x^2-10x-12=0$ $/:2$

$x^2-5x-6=0$

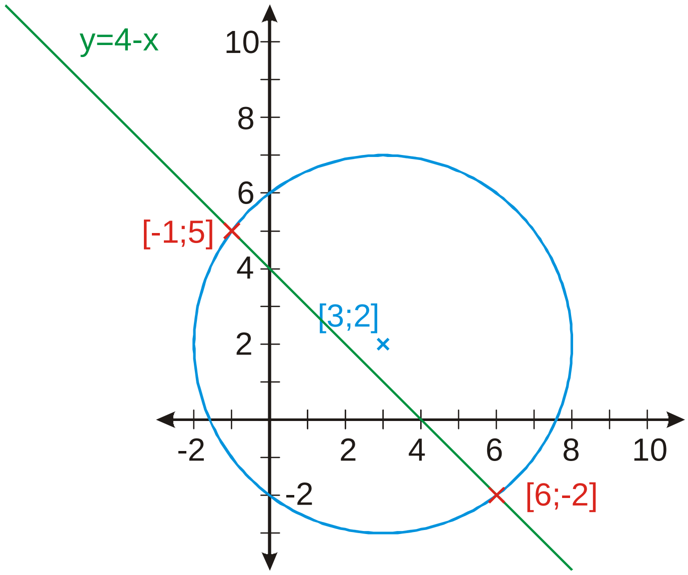
$(x+1)(x-6)=0$

$x_1=-1\Rightarrow y_1=4-x_1=4-(-1)=5$

$x_2=6\Rightarrow y_2=4-x_2=4-6=-2$

$K=\{[-1,5];[6,-2]\}$ $\Rightarrow$ pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že na přímce $y=4-x$ leží dva body $[-1,5]$ a $[6,-2]$, které mají od bodu $[3;2]$ vzdálenost 5.

Dodatek: Správnost výsledku můžeme „ověřit“ i pomocí obrázku:



Pedagogická poznámka: Následující příklad je uvedený jako BONUS, protože v podstatě nesouvisí s probíranou látkou a v daném okamžiku není důležité, aby jej řešili všichni. Rychlejší studenti si však mohou zkusit, jestli pochopili předchozí vysvětlování pořádně a dokáží ho použít i v jiném případě.

Př. 2: (BONUS) Najdi průsečík kružnic $k_1\left([0,0];r=5\right)$ a $k_2\left([-9,9];r=13\right)$

Dosadíme do rovnice přímky, která má již v předchozím příkladě zmiňovaný tvar $\left(x-s_x\right)^2+\left(y-s_y\right)^2=r^2$, kde $\left[s_x;s_y\right]$ jsou souřadnice jejího středu a r její poloměr.

$k_1:(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$

$k_2:\left(x-(-9)\right)^2+\left(y-9\right)^2=13^2$

Po úpravě získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \\ x^2+18x+81+y^2-18y+81&=169 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \\ x^2+y^2+18x-18y&=7 \end{aligned}$$, kterou řešíme v následujícím příkladu

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic: $\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \\ x^2+y^2+18x-18y&=7 \end{aligned}$.

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \\ x^2+y^2+18x-18y&=7 \end{aligned}$$

V obou rovnicích jsou obě neznámé ve druhé mocnině $\Rightarrow$ nelze dosazovat. Pomocí sčítací metody se můžeme v jedné z rovnic zbavit druhých mocnin:

$$\begin{aligned} & x^2+y^2=25 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] \quad & -18x+18y=18 \quad /:18 \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 = 25$

$-x + y = 1$

Teď už můžeme dosazovat – z druhé rovnice $y = x+1$

$x^2 + (x+1)^2 = 25$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$

$2x^2 + 2x + 1 = 25$

$2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad / : 2$

$x^2 + x - 12 = 0$

$(x+4)(x-3) = 0$

$x_1 = -4 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1 = -4 + 1 = -3$

$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = x_2 + 1 = 3 + 1 = 4$

$K = \{[-4;-3];[3;4]\}$ $\Rightarrow$ pro řešení předchozího příkladu z toho vyplývá, že zadané kružnice se protnou v bodech $[-4;-3]$ a $[3;4]$.

Poznámka: Ještě elegantněji se mocnin v druhé rovnici zbavíme tím, že provedeme substituci a místo $x^2 + y^2$ napíšeme díky rovnosti z první rovnice 25. Jde fakticky samozřejmě o to samé, k čemu dospějeme sčítáním rovnic, ale vypadá to elegantněji.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic: $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2$ $\quad$ $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2$.

Rovnice jsou ve složitém tvaru, nejdřív je upravíme:

1. rovnice: $\frac{x+2y+3}{x+1} = 2 \quad / \cdot (x+1)$ podmínka $x \neq -1$

$x + 2y + 3 = 2(x+1)$

$2y = x - 1$

$x - 2y = 1$

2. rovnice: $\frac{x+y+2}{y+1} = x+2 \quad / \cdot (y+1)$ podmínka $y \neq -1$

$x + y + 2 = (x+2)(y+1)$

$x + y + 2 = xy + x + 2y + 2$

$xy + y = 0$

Dosadíme z první rovnice do druhé: $x - 2y = 1 \Rightarrow x = 2y + 1$

$(2y+1)y + y = 0$

$2y^2 + 2y = 0$

$y(y+1) = 0$

$y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2y_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

$y_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 2y_2 + 1 = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ - tato dvojice nevyhovuje podmínce $x \neq -1$

$K = \{[1;0]\}$

Poznámka: K řešení je možné dospět i rychleji z rovnice $xy+y=0$. Úpravou na součinový tvar získáme $y(x+1)=0 \Rightarrow x_2=-1,\ y_1=0$. Druhá čísla do dvojic dopočítáme.
Trochu riskantní je trik s dosazením $x=1+2y$ přímo do neupravené druhé rovnice:
$\frac{x+y+2}{y+1}=\frac{2y+1+y+2}{y+1}=\frac{3y+3}{y+1}=\frac{3(y+1)}{y+1}=3=x+2 \Rightarrow x=1$. Správné řešení zůstane, zdánlivé zmizí s vykrácením.

Pedagogická poznámka: Studenti samozřejmě poměrně často zapomínají na podmínky. Pokud někdo najde způsob řešení uvedený v poznámce, snažím se ho motivovat k tomu, aby jej dotáhl do konce. Přijde mi matematicky zajímavější než klasické řešení, protože vyžaduje lepší představu o tom, která čísla k sobě do dvojice patří. Po vyřešení třídou si poznámku ukazujeme.

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x-y+z&=2 \\ x^2+y^2+z^2&=14 \end{aligned}$$

Použijeme dosazovací metodu. Nejdříve z první rovnice vyjádříme *y* a dosadíme do zbývajících dvou:
$y+2z=8 \Rightarrow y=8-2z$
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x-(8-2z)+z&=2 \\ x^2+(8-2z)^2+z^2&=14 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x-8+3z&=2 \\ x^2+64-32z+4z^2+z^2&=14 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x+3z&=10 \\ x^2+5z^2-32z&=-50 \end{aligned}$$
Z druhé rovnice vyjádříme *x* a dosadíme do třetí:
$x+3z=10 \Rightarrow x=10-3z$
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x+3z&=10 \\ (10-3z)^2+5z^2-32z&=-50 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x+3z&=10 \\ 100-60z+9z^2+5z^2-32z&=-50 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y+2z&=8 \\ x+3z&=10 \\ 14z^2-92z+150&=0 \end{aligned}$$
Poslední rovnice obsahuje jedinou proměnnou. Řešíme jako kvadratickou rovnici:

$14z^2 - 92z + 150 = 0 \quad / : 2$

$7z^2 - 46z + 75 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-46) \pm \sqrt{(-46)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 75}}{2 \cdot 7} = \frac{46 \pm \sqrt{16}}{14} = \frac{46 \pm 4}{14}$$

$$z_1 = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$$

$$z_2 = \frac{42}{14} = 3$$

Dopočteme ostatní proměnné:

$$z_1 = \frac{25}{7}$$

$$x_1 = 10 - 3z_1 = 10 - 3 \cdot \frac{25}{7} = -\frac{5}{7}$$

$$y_1 = 8 - 2z_1 = 8 - 2 \cdot \frac{25}{7} = \frac{6}{7}$$

$$z_2 = 3$$

$$x_2 = 10 - 3z_2 = 10 - 3 \cdot 3 = 1$$

$$y_2 = 8 - 2z_2 = 8 - 2 \cdot 3 = 2$$

$$K = \left\{ \left[-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}; \frac{25}{7} \right]; [1; 2; 3] \right\}$$

Př. 6: Petáková:
strana 17/cvičení 33 d) e) g)

Shrnutí: Soustavy rovnic s kvadratickou rovnicí řešíme většinou dosazovací metodou.
Sčítací metodu používáme na odstranění druhých mocnin z jedné z rovnic.